Vaje iz Matematike II (UNI + VSP)
Andrej Perne (andrej.perne@fe.uni-lj.si)
Ljubljana, 2004-09

DETERMINANTE

Determinanta $\det A$ je število, prirejeno kvadratni shemi A.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

i) Če so v neki vrstici/stolpcu same 0, je determinanta enaka 0.

ii) Če sta dve vrstici/stolpca enaki, je determinanta enaka 0.

iii) Če je neka vrstica/stolpec večkratnik neke druge vrstice/stolpca, je determinanta enaka 0.

iv) Če zamenjamo dve sosednji vrstici/stolpca, determinanta spremeni predznak.

v) Če kaki vrstici/stolpcu prištejemo večkratnik kake druge vrstice/stolpca, se determinanta ne spremeni.

Razvoj po vrstici/stolpcu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij}$$

Tu je A_{ij} kvadratna shema, ki jo dobimo iz sheme A tako, da izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Kramerjevo pravilo:

Imamo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Izračunamo determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Rešitev sistema:

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}.$$

1. Izračunaj naslednje determinante 2×2.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$

$$\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix} = \frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^2} - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{(1-a^2)^2}{(1-a^2)^2} = 1$$

2. Izračunaj naslednje determinante 3×3.

a)

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 18 - 10 - 30 + 14 - 6 = 0$$

b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 15 & 25 & 40 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix} &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 20(54 + 175 + 4 - 30 - 42 - 30) = 20 \cdot 131 = 2620 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(20 - 6) + 1(-2 - 5) = 21 \end{aligned}$$

3. S pomočjo razvoja po vrstici/stolpcu izračunaj naslednje determinante.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

Najprej "ustvarimo" ničle v prvem stolpcu, nato pa razvijemo determinanto po prvem stolpcu:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \end{aligned}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Najprej "ustvarimo"ničle v tretji vrstici, nato pa razvijemo determinanto po tretji vrstici. V drugem in tretjem koraku "ustvarimo"ničle v prvem stolpcu, nato pa razvijemo determinanto po prvem stolpcu.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2
\end{aligned}$$

4. Izračunaj naslednje determinante. Za katere vrednosti parametra t je determinanta enaka 0?

a) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-1) - 12 = t^2 - 3t - 10 = 0$

Rešimo kvadratno enačbo: $t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2) = 0$
Sledi: $t_1 = 5$, $t_2 = -2$.

b) $\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t + 2 = 0$

S Hornerjevim algoritmom poiščemo eno ničlo in razstavimo:
$t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2) = 0$
Sledi: $t_{1,2} = 1$, $t_3 = -2$.

5. Izračunaj naslednjo $n \times n$ determinanto s pomočjo rekurzije.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Najprej razvijemo to determinanto po prvem stolpcu, nato pa drugo izmed dobljenih determinant še po prvi vrstici:

$$
\begin{aligned}
D_n &= 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 5D_{n-1} - 4\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 5D_{n-1} - 4D_{n-2}
\end{aligned}
$$

Dobimo rekurzivno enačbo $D_n = 5D_{n-1} - 4D_{n-2}$, ki jo rešimo z nastavkom $D_n = \lambda^n$. Sledi:

$$
\begin{aligned}
\lambda^n - 5\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} &= 0 \\
\lambda^2 - 5\lambda + 4 &= 0 \\
(\lambda - 1)(\lambda - 4) &= 0
\end{aligned}
$$

Torej je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 4$. Splošna rešitev je kombinacija obeh rešitev:

$$D_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A + B \cdot 4^n.$$

Sedaj je potrebno določiti še koeficienta A in B. To storimo tako, da za majhne $n = 1, 2$ izračunamo determinanto posebej. Tako je $D_1 = 5$ in $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21$. To vstavimo v rešitev in dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$
\begin{aligned}
A + 4B &= 5, \\
A + 16B &= 21,
\end{aligned}
$$

ki ima rešitev $A = \frac{4}{3}$ in $B = -\frac{1}{3}$. Splošna rešitev determinante je torej:

$$D_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

6. S pomočjo Kramerjevega pravila reši naslednje sisteme enačb.

a)

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 7 \\
3x - 5y &= 4
\end{aligned}
$$

Izračunamo vse tri determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -13, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -39, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -13$$

Torej: $x = \frac{D_1}{D} = 3$ in $y = \frac{D_2}{D} = 1$.

b)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Izračunamo vse štiri determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -46 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -69$$

Torej: $x = \frac{D_1}{D} = 1$, $y = \frac{D_2}{D} = 1$ in $z = \frac{D_3}{D} = 3$.